期中复习

二次根式

**专题解析**

**专题一：二次根式的有关概念**

专题概述：本章涉及的概念有二次根式、最简二次根式、同类二次根式、以及有理化因式，理解这些概念要抓住概念的本质.

**例1：**判断下列各式，哪些一定是二次根式？

[解析]根据二次根式的概念进行判断：(1)(5)是二次根式；(2)因为被开方数(-3)3=-27<0，(3)不含二次根号，(6)被开方数-2*a*2-1<0，因此(2)(3)(6)均不是二次根式；(4)当*x*≤0时，-*x*≥0，是二次根式；当*x*>0时，-*x*<0，不是二次根式，即(4)不一定是二次根式.

[解](1)(5)中的式子一定是二次根式.

[点评]判定二次根式的方法：首先从结构形式上看是否有根号，再看被开方数(式)是否为非负数，最后看根指数是否为2(可省略不写).

**例2：**若是二次根式，则*m*，*n*应满足的条件是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*m*=2，*n*≤2 [提示]要使此代数式为二次根式，则根指数为2，且被开方数为非负数.

**例3：**若最简二次根式与是同类根式，求*x*与*y*的值.

答案：

**例4：**下列说法中，正确的是( ).

(A)的有理化因式是

(C)互为有理化因式

(D)-的有理化因式只有一个，即+

答案：C

**专题二：二次根式的性质**

专题概述：二次根式的性质主要包括四个公式：.这些性质的主要功能是化简二次根式，在应用二次根式的性质时，要特别注意这些性质成立的条件.

**例5：**若实数*a*，*b*满足|*a*+2|+=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]解得*a*=-2，*b*=4.将*a*=-2，*b*=4代入中，得

[答案]1

[点评]利用二次根式的非负性确定字母的取值时，先由“非负项之和等于零”可得到每项均为零，然后列方程(组)，解出方程(组)即可.

**例6：**把下列各式中根号外的因数(式)移到根号内：

[解析]将根号外的因数(式)移到根号内时，要将根号外的非负因数(式)改写成完全平方的形式作为被开方数(式)，如实际上是运用了公式.若根号外的因数(式)是负的，则负号不能移入根号内，如，移到根号内的因数(式)必须是正的，但有些字母的取值范围需由隐含条件得出，如(3)(4)两题.

[解](1)

[点评]根号外的负号不能移到根号内，如第(2)题；若根号外有字母，则要判断根号外因式的符号，若符号是负的，则负号要留在根号外，如第(5)题.

**专题三：二次根式的计算**

专题概述：进行二次根式的运算时，(1)先将二次根式适当化简；(2)对于二次根式的乘法运算可以参照整式的乘法进行运算；(3)对于二次根式的除法，通常是先写成分式的形式，然后通过分母有理化进行运算；(4)二次根式的加减法与整式的加减法类似，即在化简的基础上去括号与合并同类二次根式；(5)运算结果一般要化成最简形式.

**例7：**计算：

[解]

**例8：**计算下列各式

答案：(1)； (2)；(3)2

**专题四：与二次根式有关的综合题**

专题概述：中考题中与二次根式有关的综合应用题，常考查二次根式的非负性，如与几何知识相结合，求三角形周长、面积、判断三角形的形状等，有时它还与绝对值、零指数幂等知识结合起来考查运算能力.

**例9：**已知△*ABC*的三边长*a*，*b*，*c*满足*a*2+*b*+则△*ABC*为( ).

A.等腰三角形 B.等边三角形 C.直角三角形 D.等腰直角三角形

[解析]由于△*ABC*的三边长*a*，*b*，*c*满足*a*2+，即*a*2-10*a*+所以(*a*-5)2+而(*a*-5)2≥0所以*a*-5=0所以*a*=5，*b*=5，*c*=5.所以△*ABC*为等边三角形.

[答案]B

**专题五：与二次根式相关的化简求值问题**

**例10：**先化简，再求值：其中*x*=*y*=.

[解]原式=

当时，原式=

**例11：**已知的值.

[解析]本题如果直接代入计算，则计算量较大，而且容易出错，通过观察已知条件和欲求值的式子，发现它们都可以化简，这样采取变更问题的条件和结论的方法，然后采取整体代入的思想，比较容易求出问题的解.

[解]∴原式

[点评]运用整体代入的方法解决二次根式的计算题，不仅可以简便计算，而且还能减少出错的机率.

**专题六：阅读探究题**

**例12：**阅读材料：

小明在学习二次根式后，发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方，如.善于思考的小明进行了以下探索：

设(其中*a*，*b*，*m*，*n*均为整数)，则有

∴*a*=*m*2+2*n*2，*b*=2*mn*.这样小明就找到了一种把类似的式子化为平方式的方法.

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题：

(1)当*a*，*b*，*m*，*n*均为正整数时，若用含*m*，*n*的式子分别表示*a*，*b*，得：*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*b*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)利用所探索的结论，找一组正整数*a*，*b*，*m*，*n*填空：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(3)若且*a*，*m*，*n*均为正整数，求*a*的值.

[解析](1)根据完全平方公式运算法则，即可得出*a*、*b*的表达式；(2)首先确定好*m*，*n*的正整数值，然后根据(1)的结论即可求出*a*，*b*的值；(3)根据题意，4=2*mn*，首先确定*m*，*n*的值，通过分析*m*=2，*n*=1或*m*=1，*n*=2，即可确定*a*的值.

[解]

故答案为*m*2+3*n*2，2*mn*.

(2)(答案不唯一)设*m*=1，*n*=1，∴*a*=*m*2+3*n*2=4，*b*=2*mn*=2.

故答案为4，2，1，1.

(3)由题意，得*a*=*m*2+3*n*2，*b*=2*mn*，

∵4=2*mn*，且*m*，*n*为正整数，

∴*m*=2，*n*=1或*m*=1，*n*=2，

∴*a*=22+3×12=7或*a*=12+3×22=13.

即*a*的值为7或13.

[点评]本题主要考查二次根式的混合运算，完全平方公式，解题的关键在于熟练运用完全平方公式和二次根式的运算法则.

**例13：**(1)观察下列各式：

并根据以上规律猜想与的大小关系；

(2)根据以上规律写出用*n*(*n*是正整数)表示的不等式，并验证你的结论；

(3)运用上面的结论计算下列算式

.

答案：(1)，验证略；(3)9+-

**总结：专题最终目标**

(1)正确理解二次根式的性质“是非负数”的含义，即

(2)正确区分两个重要式子：即注意不要将两者混淆.

(3)类比合并同类项和整式的运算，学习二次根式的加、减、乘、除运算.

(4)学习过程中还要注意体会转化、分类讨论等数学思想方法在本章中的应用.如化简形如的式子时，应先将其转化为|*a*|，然后再根据*a*的符号分类讨论，即

一元二次方程

**专题解析**

**专题一：一元二次方程的定义及有关概念**

专题概述：一元二次方程的定义必须同时满足三个条件：①是整式方程；②只含有一个未知数；③未知数的最高次数为2，并且一元二次方程中的“元”和“次”是对整理化简后的方程而言的，对于一元二次方程的一般形式*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)，小括号内的隐含条件*a*≠0不能忽视，它是一元二次方程定义中的一部分.

**例1：**判断下列方程是否是关于*x*的一元二次方程，如果是请指出各项系数：

(1)3(*x*+1)2=2(*x*+1)； (3)*ax*2+*bx*+*c*=0；

(4)*x*2+2*x*=*x*2-1； (5)*x*2+2=(*x*+1)(*x*+2)； (6)*ax*2+2=*x*(*a*<0).

答案：(1)是；(2)不是；(3)当*a*=0时，不是；当*a*≠0时，是；(4)不是；(5)不是；(6)是

**例2：**若一个一元二次方程的两个根分别是Rt△*ABC*的两条直角边长，且*S*△*ABC*=3，请写出一个符合题意的一元二次方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]设Rt△*ABC*的两条直角边的长为*a*、*b*，因为*S*△*ABC*=3，所以*ab*=6，又因为一元二次方程的两根为*a*、*b*(*a*>0，*b*>0)，所以符合条件的一元二次方程为(*x*-2)(*x*-3)=0，(*x*-1)(*x*-6)=0等，即*x*2-5*x*+6=0或*x*2-7*x*+6=0等.

[答案]*x*2-5*x*+6=0(答案不唯一)

**例3：**若*x*=-2是关于*x*的一元二次方程的一个根，则*a*的值为( ).

A.1或4 B.-1或-4 C.-1或4 D.1或-4

[解析]∵*x*=-2是关于*x*的一元二次方程*x*2-的一个根，∴4+5*a*+*a*2=0，∴(*a*+1)(*a*+4)=0，解得*a*1=-1，*a*2=-4.

[答案]B

**专题二：一元二次方程的解法**

专题概述：一元二次方程有四种基本解法：直接开平方法、因式分解法、配方法、求根公式法.在解一元二次方程时，我们应当仔细观察方程的形式和系数特点，选择适当的方法，力求解题过程简捷、明快.

**例4：**用适当方法解下列方程：

(3)8*x*+9984=*x*2； (4)0.3*x*2-1.2*x*-1=0；

答案：(1)*x*1=，*x*2=；(2)*x*1=，*x*2=；(3)*x*1=104，*x*2=-96；

(4)*x*1=，*x*2=.

**专题三：一元二次方程根的判别式**

专题概述：一元二次方程根的判别式是每年中考的重点内容之一，常与其他知识点联合命题.主要应用有：(1)不解方程判断根的情况；(2)依据方程根的情况，确定方程系数中字母的取值范围.

**例5：**已知关于*x*的方程*kx*2+(1-*k*)*x*-1=0，下列说法正确的是( ).

A.当*k*=0时，方程无解

B.当*k*=1时，方程有一个实数解

C.当*k*=-1时，方程有两个相等的实数解

D.当*k*≠0时，方程总有两个不相等的实数解

[解析]当*k*=0时，原方程变为一元一次方程*x*-1=0，该方程的解是*x*=1，故A项错误；当*k*=1时，原方程变为一元二次方程*x*2-1=0，方程有两个不相等的实数解：*x*1=1，*x*2=-1，故B项错误；当*k*≠0时，原方程为一元二次方程，Δ=*b*2-4*ac*=(1-*k*)2+4*k*=(1+*k*)2≥0，方程总有两个实数解，当且仅当*k*=-1时，方程有两个相等的实数解，故C项正确，D项错误.

[答案]C

**例6：**如果关于*x*的一元二次方程有两个不相等的实数根，那么*k*的取值范围是( ).

[解析]由题意得解得且*k*≠0.

[答案]D

[点评]此题容易忽略两个隐含条件，*k*≠0和2*k*+1≥0而出现错误.

**例7：**若关于*x*的方程*ax*2+2(*a*+2)*x*+*a*=0有实数解，那么实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]①当*a*=0时，方程变为4*x*=0，∴*x*=0；②当*a*≠0时，Δ=[2(*a*+2)]2-4*a*2≥0，解得*a*≥-1，∴*a*≥-1且*a*≠0.综上所述，*a*的取值范围为*a*≥-1.

[答案]*a*≥-1

[点评]解答此题时，有些学生会因为不认真审题，没有注意分*a*=0与*a*≠0两种情况讨论.

**例8：**已知整数*k*<5，若△*ABC*的边长均满足关于*x*的方程，则△*ABC*的周长是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]根据题意得*k*≥0且，解得，又*k*<5且为整数，∴*k*=4，方程变形为*x*2-6*x*+8=0，解得*x*1=2，*x*2=4，由于△*ABC*的边长均满足关于*x*的方程*x*2-6*x*+8=0，所以△*ABC*的边长为2，2，2或4，4，4或4，4，2，因此△*ABC*的周长为6或12或10.

[答案]6或12或10

**例9：**已知关于*x*的一元二次方程(1-2*a*)*x*2-2*x*-1=0有两个实数根，求*a*的取值范围.

答案：-1

**专题四：一元二次方程的应用**

专题概述：一元二次方程的应用主要是：(1)二次三项式的因式分解；(2)列方程解应用题.复习时，要对课本上的典型习题、例题予以足够的重视，如把工程问题和日常生活、生产实践中的问题结合在一起，把增长率问题与当今社会纳税、利息、分期付款等问题联系起来.不论问题的背景如何，解应用题时抓住关键词语，寻找等量关系是关键.

**例10：**在实数范围内因式分解：

(1)2*x*2-3*xy*-*y*2； (2)(*x*2+3*x*)2-2(*x*2+3*x*)-24.

答案：

**例11：**为丰富居民业余生活，某居民区组建筹委会，该筹委会动员居民自愿集资建立一个书刊阅览室.经预算，一共需要筹资30000元，其中一部分用于购买书桌、书架等设施，另一部分用于购买书刊.

(1)筹委会计划，购买书刊的资金不少于购买书桌、书架等设施资金的3倍，问最多用多少资金购买书桌、书架等设施？

(2)经初步统计，有200户居民自愿参与集资，那么平均每户需集资150元.镇政府了解情况后，赠送了一批阅览室设施和书籍，这样，只需参与户共集资20000元.经筹委会进一步宣传，自愿参与的户数在200户的基础上增加了*a*%(其中*a*>0).则每户平均集资的资金在150元的基础上减少了%，求*a*的值.

[解析](1)设用于购买书桌、书架等设施的为*x*元，则购买书刊的有(30000-*x*)元，利用“购买书刊的资金不少于购买书桌、书架等设施资金的3倍”，列出不等式求解即可；(2)根据“自愿参与的户数在200户的基础上增加了*a*%(其中*a*>0).则每户平均集资的资金在150元的基础上减少了，且总集资额为20000元”列出方程求解即可.

[解](1)设用于购买书桌、书架等设施的为*x*元，则购买书刊的有(30000-*x*)元，

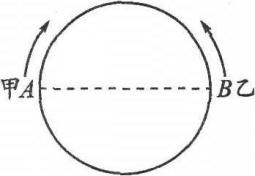
根据题意得：30000-*x*≥3*x*，解得：*x*≤7500.

故最多用7500元购买书桌、书架等设施.

(2)根据题意得：20000，整理得：*a*2+10*a*-3000=0，

解得：*a*=50或*a*=-60(舍去)，

所以*a*的值是50.

**例12：**某校为培养青少年科技创新能力，举办了动漫制作活动，小明设计了点做圆周运动的一个雏形.如图所示，甲、乙两点分别从直径的两端点*A*、*B*以顺时针、逆时针的方向同时沿圆周运动.甲运动的路程*l*(cm)与时间*t*(s)满足关系：，乙以4cm/s的速度匀速运动，半圆的长度为21cm.

(1)甲运动4s后的路程是多少？

(2)甲、乙从开始运动到第一次相遇时，它们运动了多少时间？

(3)甲、乙从开始运动到第二次相遇时，它们运动了多少时间？

[解](1)当*t*=4时，

答：甲运动4s后的路程是14cm.

(2)设它们运动了*m* s后第一次相遇，根据题意，得

解得*m*1=3，*m*2=-14(不合题意，舍去).

答：甲、乙从开始运动到第一次相遇时，它们运动了3s.

(3)设它们运动了*n* s后第二次相遇，根据题意，得

解得*n*1=7，*n*2=-18(不合题意，舍去).

答：甲、乙从开始运动到第二次相遇时，它们运动了7s.